Saarbrücken 1957

Helmut Groh

# ZUR THEORIE DER IDEALE IN DER ÄUSSEREN ALGEBRA

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Würde eines
D o c t o r  r e r u m  n a t u r a l i u m
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

vorgelegt von
Helmut Groh
Diplom - Mathematiker

---

Saarbrücken, im Februar 1957

4072/61

Vorwort

Die vorliegende Arbeit behandelt die Theorie der assoziierten Unterräume nicht homogener Ideale über einem n-dimensionalen Vektorraum E in der äusseren Algebra. Wie im homogenen Fall, kann man zeigen, dass es für solche Ideale I einen eindeutig bestimmten, kleinsten Vektorunterraum $\mathcal{E}$ aus E gibt, dessen äussere Algebra $\mathcal{E}^\wedge$ eine Idealbasis von I enthält. Für eine vorgegebene Teilmenge $M \subset E^\wedge$ werden die jeweils kleinsten Links-, Rechts- und zweiseitigen Ideale betrachtet, die M enthalten. Es wird gezeigt, dass der assoziierte Unterraum des kleinsten zweiseitigen Ideals in denen des Links- und des Rechtsideals enthalten sind. Betrachtet man ein zweiseitiges Ideal I nur als Linksideal, so erhält man einen linksassoziierten Unterraum. Dieser ist entweder mit E oder mit dem assoziierten Unterraum von I identisch. Analoges gilt, wenn man I nur als Rechtsideal betrachtet. Es wird gezeigt, dass links- und rechtsassoziierter Unterraum identisch sind, und nur dann kleiner als E sein können, wenn I selbstkonjgiert ist (vgl. S. 10 und S 13) Die assoziierten Unterräume der Summe und des Durchschnitts zweier Ideale I und I' werden untersucht. Sie sind gleich der Summe der assoziierten Unterräume von I und I', sofern letztere disjunkt sind. Anschliessend werden vollständige Ideale betrachtet. Jeder Menge $M \subset E^\wedge$ entspricht ein kleinstes vollständiges Ideal J, das M enthält. Der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}_o$ von J ist in dem von [M] enthalten. Es wird gezeigt, dass das Aufsuchen der Lösungsräume von M auf das Aufsuchen der Lösungsräume von $J \cap \mathcal{E}_o^\wedge$ reduziert werden kann und dass $J \cap \mathcal{E}_o^\wedge$ unter allen M äquivalenten Mengen $M' \subset E^\wedge$ den kleinsten erzeugenden Unterraum hat.

Meinen Lehrern, den Herrn Professoren B. Charles und M. Lefranc von der Universität des Saarlandes, verdanke ich vielseitige Anregungen und Hinweise, insbesondere zur Untersuchung von Summe und Durchschnitt zweier Ideale. Ich möchte ihnen herzlich danken.

Helmut Groh

# 1. Kapitel

## Äussere Algebra

### Antisymmetrische Tensoren

$E$ und $D$ seien n-dimensionale duale Vektorräume über dem kommutativen Körper $K$ der Charakteristik o . Der Körper der rationalen Zahlen sei in $K$ eingebettet. Zwei Vektoren $\xi \in E$ und $x \in D$ ist also ein Element aus $K$ zugeordnet, das von beiden linear abhängt. Wir bezeichnen es mit $\langle \xi, x \rangle$ oder $\langle x, \xi \rangle$ . Sind $\phi$ und $T$ Elemente aus zwei beliebigen zueinander dualen Vektorräumen, so bezeichnen $\langle \phi, T \rangle$ und $\langle T, \phi \rangle$ beide das $\phi$ und $T$ zugeordnete Element aus $K$ . $\phi$ und $T$ heissen orthogonal, wenn $\langle \phi, T \rangle$ verschwindet. Zwei Vektorunterräume von dualen Vektorräumen heissen orthogonal, wenn ihre Elemente je paarweise orthogonal sind.

In der Tensorrechnung definiert man $E^{\boxtimes p}$ als Menge der $p$-linearen Formen über dem Vektorraum $D$ . $E^{\boxtimes p}$ ist ein Vektorraum über $K$ mit der Dimension $n^p$ . Die Räume $E^{\boxtimes p}$ und $D^{\boxtimes p}$ können als dual betrachtet werden. Dabei gilt für $\phi \in E^{\boxtimes p}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_p \in D$

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \langle \phi, x_1 \boxtimes x_2 \boxtimes \ldots \boxtimes x_p \rangle$$

Im folgenden bezeichnet $G_p$ die Gruppe der Permutationen von $1, 2, \ldots, p$, $\sigma$ , $\tau$ bezeichnen Elemente von $G_p$ , $\sigma 1$, $\sigma 2$, ... bezeichnen der Reihe nach diejenigen Zahlen von $1, 2, \ldots, p$ , die bei der Permutation $\sigma$ an die erste, zweite, ... Stelle rücken. $\chi(\sigma)$ bezeichnet $\pm 1$ , je nachdem die Permutation $\sigma$ gerade oder ungerade ist. Es gilt offenbar

$$\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau) \quad \text{und} \quad \chi(\sigma^{-1}) = \chi(\sigma) .$$

Der Permutation $\sigma \in G_p$ ordnen wir einen linearen Operator über $E^{\boxtimes p}$

zu, den wir , da Verwechselungen nicht zu befürchten sind, ebenfalls mit dem Symbol $\sigma$ bezeichnen. Dazu setzen wir für $\phi \in E^{\otimes p}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_p \in D$

$$\sigma\phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \phi(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \ldots, x_{\sigma p})$$

Es gilt $\sigma(\tau\phi)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \tau\phi(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \ldots, x_{\sigma p}) = \phi(x_{\sigma\tau 1}, x_{\sigma\tau 2}, \ldots, x_{\sigma\tau p})$, d.h.

$$(1) \qquad (\sigma\tau)\phi = \sigma(\tau\phi)$$

Man kann dafür also einfach $\sigma\tau\phi$ schreiben. Bezeichnet 1 die identische und $\sigma^{-1}$ die inverse Permutation von $\sigma$, so gilt folglich

$$(2) \qquad 1\sigma\phi = \sigma 1\phi = \sigma\phi$$

$$(3) \qquad \sigma^{-1}\sigma\phi = \sigma\sigma^{-1}\phi = 1\phi = \phi.$$

Ist $\phi$ ein Tensorprodukt von Vektoren aus $E$, also $\phi = \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \ldots \otimes \xi^p$, so gilt für $p$ beliebige Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_p$ aus $D$

$$\sigma\phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \phi(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \ldots, x_{\sigma p}) =$$
$$\langle \xi^1, x_{\sigma 1}\rangle \langle \xi^2, x_{\sigma 2}\rangle \ldots \langle \xi^p, x_{\sigma p}\rangle = \langle \xi^{\sigma^{-1}1}, x_1\rangle \langle \xi^{\sigma^{-1}2}, x_2\rangle \ldots \langle \xi^{\sigma^{-1}p}, x_p\rangle$$
$$= \xi^{\sigma^{-1}1} \otimes \xi^{\sigma^{-1}2} \otimes \ldots \otimes \xi^{\sigma^{-1}p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

Um vom dritten zum vierten Ausdruck zu gelangen, hat man nur die Faktoren $\langle \xi^i, x_{\sigma i}\rangle$, $i = 1, 2 \ldots, p$ nach wachsenden unteren Indizes zu ordnen. Die letzte Gleichheit ergibt

$$(4) \qquad \sigma\, \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \ldots \otimes \xi^p = \xi^{\sigma^{-1}1} \otimes \xi^{\sigma^{-1}2} \otimes \ldots \otimes \xi^{\sigma^{-1}p}$$

Wir definieren nun den antisymmetrisierenden Operator $A$ über $E^{\otimes p}$:

$$(5) \qquad A = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma)\, \sigma$$

Wegen $\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma\tau)\sigma\tau = \Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\sigma$ gilt für $\tau\in G_p$ $\tau A = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\tau\sigma = \chi(\tau)\frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\tau\sigma)\tau\sigma = \chi(\tau)A$. Auf gleicho Weiso zeigt man $A\tau = \chi(\tau)A$. Es folgt

$$(6)\qquad A\tau = \tau A = \chi(\tau)A \qquad \tau\in G_p$$

Daraus folgt $A^2 = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\sigma A = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\chi(\sigma)A = A$

$$(7)\qquad A^2 = A$$

Für $\phi\in E^{\boxtimes r}$, $\psi\in E^{\boxtimes q}$, $q+r=p$ gilt folgende Formel

$$(8)\qquad A\,\phi\boxtimes\psi = (-1)^{qr}A\,\psi\boxtimes\phi$$

Da $A$ ein linearer Operator ist, genügt es, (8) für $\psi = \eta^1\boxtimes\eta^2\boxtimes\dots\boxtimes\eta^q$ und $\phi = \eta^{q+1}\boxtimes\eta^{q+2}\boxtimes\dots\boxtimes\eta^p$ zu beweisen. $\tau$ bezeichne die r-te Potenz des Zyklus $(p,p-1,\dots,2,1)$, d.h. $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & p\\ q+1 & q+2 & \dots & p & 1 & \dots & q\end{pmatrix}$ und $\chi(\tau) = (-1)^{r(p-1)} = (-1)^{r(r-1)}(-1)^{qr} = (-1)^{qr}$. Nach (4) gilt also $\tau^{-1}\psi\boxtimes\phi = \eta^{\tau 1}\boxtimes\eta^{\tau 2}\boxtimes\dots\boxtimes\eta^{\tau p} = \phi\boxtimes\psi$. Es folgt aus (6) wegen $\chi(\tau^{-1}) = \chi(\tau) = (-1)^{qr}$

$$A\,\phi\boxtimes\psi = \chi(\tau^{-1})\,A\,\psi\boxtimes\phi = (-1)^{qr}A\,\psi\boxtimes\phi$$

Es ist noch zu bemerken, dass jedem Tensorraum $E^{\boxtimes p}$ $p = 1,2,\dots,n$ ein antisymmetrisierender Operator entspricht. Wir benutzen im allgemeinen für diese verschiedenen Operatoren das gleiche Symbol $A$. Sie sind jedoch, wie etwa beim Beweis von (9) und (11), wohl zu unterscheiden.

Es sei $\phi\in E^{\boxtimes r}$ und $\psi\in E^{\boxtimes q}$, wobei $r+q=p$ sei. Ist $A$ der antisymmetrisierende Operator über $E^{\boxtimes p}$, so gilt für $\sigma\in G_q$

$$A\left\{(\sigma\psi)\boxtimes\phi\right\} = \chi(\sigma)\,A\,\psi\boxtimes\phi$$

Zum Beweis betrachtet man die Permutation $\sigma'\in G_p$, für welche $\sigma' k = \sigma k$

$k = 1,2,\ldots,q$ und $\sigma' k = k$ für $k = q+1,\ldots,p$. Es gilt dann offenbar $(\sigma\Psi) \boxtimes \phi = \sigma' ( \Psi \boxtimes \phi )$, womit aus (6) wegen $\chi(\sigma') = \chi(\sigma)$ die Behauptung folgt.

Bezeichnet $A'$ den antisymmetrisierenden Operator über $E^{\boxtimes q}$, sogilt also $A \{ ( A'\Psi ) \boxtimes \phi \} = \frac{1}{q!} \Sigma_{\sigma \in G_q} \chi(\sigma) A \{ (\sigma\Psi) \boxtimes \phi \} = \frac{1}{q!} \Sigma_{\sigma \in G_q} \chi(\sigma)\chi(\sigma) A \Psi \boxtimes \phi = A \Psi \boxtimes \phi$, d.h.

$$(9) \qquad A \{ ( A'\Psi ) \boxtimes \phi \} = A \Psi \boxtimes \phi$$

Bezeichnet $A''$ den antisymmetrisierenden Operator über $E^{\boxtimes r}$, so folgt aus (8) und (9) schliesslich

$$(10) \qquad A \{ \Psi \boxtimes ( A''\phi ) \} = A \Psi \boxtimes \phi$$

$\phi \in E^{\boxtimes p}$ heisst antisymmetrisch, wenn $\tau\phi = \chi(\tau)\phi$ gilt. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_p$ Vektoren aus $D$, so ist dies gleichbedeutend mit $\phi ( x_{\tau 1}, x_{\tau 2}, \ldots, x_{\tau p}) = \chi(\tau) \phi ( x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Nach (6) ist also $A\phi$ antisymmetrisch, für alle $\phi \in E^{\boxtimes p}$. Ist $\phi$ selbst antisymmetrisch, so folgt aus $\Sigma_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma)\, \sigma\phi = \Sigma_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma)\chi(\sigma)\phi = p!\,\phi$ die Gleichheit $A\phi = \phi$.

Bezeichnet man mit $N$ die Menge aller $p$-linearen Formen $\phi$ über $D$, für die $A\phi = o$ ist und mit $E^{\wedge p}$ die Menge aller antisymmetrischen $p$-linearen Formen, so sind $N$ und $E^{\wedge p}$ Vektoruntorräume des Tensorraumes $E^{\boxtimes p}$, welcher direkte Summe dieser Unterräume ist. Der antisymmetrisierende Operator $A$ ist die Parallelprojektion zu $N$ auf $E^{\wedge p}$. $E^{\wedge p}$ heisst $p$-te äussere Potenz von $E$ und $\phi \in E^{\wedge p}$ heisst $p$-Vektor.

In gleicher Weise wie in $E^{\boxtimes p}$ kann man in $D^{\boxtimes p}$ einen antisymmetrisierenden Operator $A$ definieren. Die Dualität dieser beiden Tensorräume

ergibt nun folgende interessante Formel für $\phi \in E^{\boxtimes p}$, $T \in D^{\boxtimes p}$

$$(11) \qquad \langle A\,\phi\,,\,T\rangle \;=\; \langle A\,\phi\,,\,A\,T\rangle \;=\; \langle \phi\,,\,A\,T\rangle$$

Da $A$ linear ist, genügt es, (11) für $T = x_1 \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_p$, $x_i \in D$ zu beweisen. Es gilt in diesem Fall wegen $\langle A\,\phi\,,\,T\rangle = A\,\phi\,(x_1,\cdots x_p)$ und (4)

$$\langle A\phi\,,\,A\,T\rangle = \frac{1}{p!}\,\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\,\langle A\,\phi,\,\sigma T\rangle =$$

$$\frac{1}{p!}\,\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\;\; A\,\phi\,(x_{\sigma^{-1}1},x_{\sigma^{-1}2},\cdots,x_{\sigma^{-1}p}) \;=\; \frac{1}{p!}\,\Sigma_{\sigma\in G_p}\chi(\sigma)\,\chi(\sigma^{-1})\,\langle A\,\phi\,,T\rangle$$

$$= \langle A\,\phi\,,\,T\rangle$$

Ebenso zeigt man $\langle A\,\phi,\,A\,T\rangle \;=\; \langle \phi\,,\,A\,T\rangle$ .

Aus (11) ergibt sich nun die Dualität von $E^{\wedge p}$ und $D^{\wedge p}$. Da nämlich $E^{\boxtimes p}$ und $D^{\boxtimes p}$ duale Räume sind, besteht der Dualraum von $E^{\wedge p}$ bekanntlich aus dem Faktorraum von $D^{\boxtimes p}$ nach dem zu $E^{\wedge p}$ orthogonalen Vektorunterraum von $D^{\boxtimes p}$. Es sei nun $T \in D^{\boxtimes p}$. Da $A\,E^{\boxtimes p} = E^{\wedge p}$ und $\langle A\,\phi\,,\,T\rangle = \langle \phi\,,\,A\,T\rangle$ ist, sind die drei Aussagen $T \perp E^{\wedge p}$, $A\,T \perp E^{\boxtimes p}$ und $A\,T = o$ äquivalent. Der Orthogonalraum von $E^{\wedge p}$ ist also identisch mit der Menge $N'$ aller $T \in D^{\boxtimes p}$, für welche $A\,T = o$ ist. Da $D^{\boxtimes p}$ direkte Summe von $D^{\wedge p}$ und $N'$ ist, kann man folglich den Faktorraum von $D^{\boxtimes p}$ nach $N'$, d.h. den Dualraum von $E^{\wedge p}$ mit $D^{\wedge p}$ identifizieren. Das war aber behauptet worden.

Das äussere Produkt

Zwei Tensoren $\phi \in E^{\boxtimes p}$ und $\psi \in E^{\boxtimes q}$ entspricht eindeutig ein Tensor $\phi \boxtimes \psi \in E^{\boxtimes p+q}$, welcher Tensorprodukt von $\phi$ und $\psi$ heisst. Man definiert das äussere Produkt $\phi \wedge \psi$ von $\phi$ und $\psi$ durch

$$(12) \qquad \phi \wedge \psi \;=\; \frac{(p+q)!}{p!\;q!}\;\; A\;\phi \boxtimes \psi$$

Hier bezeichnet $A$ den antisymmetrisierenden Operator über $E^{\otimes p+q}$. Die äussere Multiplikation ordnet also insbesondere einem $p$-Vektor und einem $q$-Vektor einen $(p+q)$-Vektor zu. Wir betrachten im folgenden das äussere Produkt nur für antisymmetrische Tensoren. Aus (8) folgt

$$(13) \qquad \phi \wedge \psi = (-1)^{pq}\, \psi \wedge \phi \qquad \phi \in E^{\wedge p},\ \psi \in E^{\wedge q}$$

Die Assoziativität des äusseren Produktes folgt aus (9) und (10). Ist nämlich $\phi \in E^{\wedge p}$, $\psi \in E^{\wedge q}$ und $\Omega \in E^{\wedge s}$ und bezeichnen $A$ bzw. $A'$ die antisymmetrisierenden Operatoren über $E^{\otimes p+q+s}$ bzw. über $E^{\otimes p+q}$, so gilt

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \Omega = \frac{(p+q+s)!}{(p+q)!\,s!}\, A \left\{ \left( \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\, A'\, \phi \otimes \psi \right) \otimes \Omega \right\}$$

$$= \frac{(p+q+s)!}{p!\,q!\,s!}\, A\, (\phi \otimes \psi \otimes \Omega)$$

In analoger Weise zeigt man, dass der letzte Ausdruck gleich $\phi \wedge (\psi \wedge \Omega)$ ist. Daraus folgt schliesslich

$$(14) \qquad \phi \wedge (\psi \wedge \Omega) = (\phi \wedge \psi) \wedge \Omega$$

Wir schreiben dafür einfach $\phi \wedge \psi \wedge \Omega$. Man erkennt weiterhin leicht, dass das äussere Produkt von seinen Faktoren linear abhängt. Dies gilt nämlich einerseits für das Tensorprodukt, andrerseits ist $A$ ein lineares Operator.

Es interessiert an dieser Stelle, $\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p$, $\xi^i \in E$ in Abhängigkeit von $\xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \ldots \otimes \xi^p$ zu berechnen. Eine zum Beweis von (14) analoge Rechnung ergibt

$$(15) \qquad \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = p!\, A\, \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \ldots \otimes \xi^p$$

Aus (4) folgt schliesslich für letzteren Ausdruck $\Sigma_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma)\, \xi^{\sigma^{-1}1} \otimes \xi^{\sigma^{-1}2} \otimes \ldots \otimes \xi^{\sigma^{-1}p}$. In dieser Summe kann man $\chi(\sigma)$ durch

$\chi(\sigma^{-1})$ und die Summation über $\sigma$ durch die über $\sigma^{-1}$ ersetzen. Setzt man noch $\sigma^{-1} = \tau$, so erhält man schliesslich

$$(15') \qquad \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = \Sigma_{\tau \in G_p} \chi(\tau)\, \xi^{\tau 1} \otimes \xi^{\tau 2} \otimes \ldots \otimes \xi^{\tau p}$$

Ordnet man die letzte Summe, indem man zunächst alle Summanden mit $\tau 1 = 1$ zusammenfasst, dann alle Summanden mit $\tau 1 = 2$ u.s.w., so erhält man als Faktor ( Tensormultiplikation! ) von $\xi^1$ gerade $\xi^2 \wedge \xi^3 \wedge \ldots \wedge \xi^p$, als Faktor von $\xi^2$ gerade $-\xi^1 \wedge \xi^3 \wedge \xi^4 \wedge \ldots \wedge \xi^p$ u.s.w. Man erkennt diese Faktoren durch einen Vergleich mit (15'). Es gilt also

$$(15'') \qquad \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = \Sigma_{k=1}^{p} (-1)^{k+1}\, \xi^k \otimes (\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^{k-1} \wedge \xi^{k+1} \wedge \ldots \wedge \xi^p)$$

Wir bemerken noch, dass $\phi = \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p$ dann und nur dann verschwindet, wenn seine Faktoren linear voneinander abhängen. Ist letzteres nämlich der Fall, so ist einer der Faktoren Linearkombination der anderen und $\phi$ selbst ist Summe von äusseren Produkten $\eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p$ mit mindestens zwei gleichen Faktoren. Bezeichnet $\sigma \in G_p$ die Permutation, die beide vertauscht, so gilt nach (4) und (15) $\chi(\sigma)\, \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p = \sigma^{-1}\, \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p = \eta^{\sigma 1} \wedge \eta^{\sigma 2} \wedge \ldots \wedge \eta^{\sigma p} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p$, also $\eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p = -\eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \ldots \wedge \eta^p$. D.h. $\phi = o$, da alle Summanden von $\phi$ verschwinden. Es seien nun umgekehrt die Faktoren von $\phi$ linear unabhängige Vektoren aus $E$. Dann existieren offenbar $x_1, x_2, \ldots, x_p \in D$, so dass $\langle x_i, \xi^j \rangle = \delta_i^j$ (Kroneckersymbol) $i, j = 1, 2, \ldots, p$, und (15') ergibt $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \Sigma_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma)\, \delta_1^{\sigma 1}\, \delta_2^{\sigma 2} \ldots \delta_p^{\sigma p} = 1$. In diesem Fall gilt also $\phi \neq o$.

Aus dieser Überlegung folgt unmittelbar, dass $E^{\wedge n+1}$, $E^{\wedge n+2}, \ldots$ nur aus dem Nullelement bestehen und dass $E^{\wedge p}$ für $p \leq n$ Elemente $\neq o$ enthält.

Nach (15) ist $A\ \xi^1 \boxtimes \xi^2 \boxtimes \ldots \boxtimes \xi^p = \frac{1}{p!}\ \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p$ . Wegen $A\phi = \phi$ für alle $\phi \in E^{\wedge p}$ ist also jeder antisymmetrische Tensor aus $E^{\boxtimes p}$ eine endliche Linearkombination von äusseren Produkten $\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p$ . Bildet $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ eine Basis in $E$, so bilden bekanntlich $\varepsilon^{i_1} \boxtimes \varepsilon^{i_2} \boxtimes \ldots \boxtimes \varepsilon^{i_p}$ $i_k = 1, 2, \ldots, n$ eine Basis in $E^{\boxtimes p}$. Folglich bilden die $\varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ $i_k = 1, 2, \ldots, n$ ein Erzeugendensystem in $E^{\wedge p}$. Man erhält daraus eine Basis, wenn man nur die Elemente dieses Erzeugendensystems nimmt, für die $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ . Da nämlich die beiden p-Vektoren $\varepsilon^{i_{\sigma 1}} \wedge \varepsilon^{i_{\sigma 2}} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_{\sigma p}}$ und $\varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ sich höchstens durch einen Faktor $(-1)$ unterscheiden, was wegen (4) und (6) unmittelbar aus (15) folgt, so bilden die $\varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ offenbar ein Erzeugendensystem von $E^{\wedge p}$ . Es bleibt ihre lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Nach (15') gilt

$$\Sigma_{i_1 < \ldots < i_p}\ a_{i_1 \ldots i_p}\ \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} =$$

$$\Sigma_{i_1 < \ldots < i_p}\ \Sigma_{\sigma \in G_p}\ \chi(\sigma)\ a_{i_1 \ldots i_p}\ \varepsilon^{i_{\sigma 1}} \boxtimes \varepsilon^{i_{\sigma 2}} \boxtimes \ldots \boxtimes \varepsilon^{i_{\sigma p}}$$

In der letzten Summe steht jeder Tensor der in $E^{\boxtimes p}$ angegebenen Basis genau einmal. Sie verschwindet also dann und nur dann, wenn sämtlich $\chi(\sigma)\ a_{i_1 \ldots i_p}$ , also insbesondere alle $a_{i_1 \ldots i_p}$ verschwinden. Dies war zu beweisen. Wir nennen $\varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$ , $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ die in $E^{\wedge p}$ von $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ induzierte Basis.

Aus der letzten Überlegung folgt unmittelbar, dass $E^{\wedge p}$ von der Dimension $\binom{n}{p}$ ist.

Oben wurde bereits die Dualität von $E^{\wedge p}$ und $D^{\wedge p}$ nachgewiesen. Wir bemerken nun, dass die von dualen Basen aus $E$ und $D$ in $E^{\wedge p}$ und $D^{\wedge p}$ induzierten Basen bis auf einen Faktor $p!$ dual sind. Bezeichnet man nämlich erstere mit $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ und $e_1, e_2, \ldots, e_n$ , so folgt aus $\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$

( Kroneckersymbol ) wegen (15) und (11) z.B.

$$\langle \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p},\ e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_p \rangle = p! \langle \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p},\ e_1 \otimes e_2 \otimes \ldots \otimes e_p \rangle$$

$$= (p!)^2 \, A\, \varepsilon^{i_1} \otimes \varepsilon^{i_2} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_p} (e_1, e_2, \ldots, e_p) = p! \sum_{\sigma \in G_p} \chi(\sigma) \delta^{i_1}_{\sigma 1} \delta^{i_2}_{\sigma 2} \ldots \delta^{i_p}_{\sigma p}$$

In der letzten Summe ist nur dann ein Summand von Null verschieden, wenn $i_1 = \tau 1,\ i_2 = \tau 2, \ldots,\ i_p = \tau p$ , $\tau \in G_p$ gilt. Die Summe hat dann den Wert $\chi(\tau)$ . Ist nun $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ , so ist das nur der Fall, wenn $i_1 = 1,\ i_2 = 2, \ldots,\ i_p = p$ ist, wobei obiger Ausdruck den Wert $p!$ annimmt. In analoger Weise zeigt man ganz allgemein für $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n$

$$\langle \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p},\ e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} \rangle = \begin{cases} p! \text{ wenn } i_k = j_k & k = 1, 2, \ldots, p \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Dies war zu beweisen.

Die äussere Algebra über $E$

Ist in $\phi \wedge \psi = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} A\, \phi \otimes \psi$ , $\phi \in E^{\wedge p}$ , $\psi \in E^{\wedge q}$ etwa $p = 0$, d.h. ist $\phi \in E^{\wedge 0} = K$ , so erhält man $\phi \wedge \psi = \phi\, \psi \in E^{\wedge q}$. Sind jedoch $p \neq 0$ und $q \neq 0$ , so ist das äussere Produkt $\phi \wedge \psi$ weder in $E^{\wedge p}$ noch in $E^{\wedge q}$ enthalten. Um die äussere Multiplikation zu einer Verknüpfung zu machen, die zwischen Elementen einer bestimmten Menge definiert ist und nicht aus dieser Menge hinausführt, bildet man die direkte Summe $E^{\wedge}$ der Vektorräume $K = E^{\wedge 0}, E^{\wedge 1}, \ldots, E^{\wedge n}$ . $E^{\wedge}$ heisst äussere oder Grassmannsche Algebra über dem Vektorraum $E$ . Ein Element $\phi \in E^{\wedge}$ wird im folgenden äusserer Vektor genannt. Ein solches ist also eine Summe von $p$-Vektoren $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ .

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \ldots + \phi_n \qquad \phi_p \in E^{\wedge p} \quad p = 0, 1, \ldots, n$$

$\phi_p$ heisst homogene Komponente $p$-ter Stufe von $\phi$ . Ist $\psi_q$ die homogene

Komponente q-ter Stufe von $\Psi \in \mathbb{E}^\wedge$, $q = o, 1, \ldots, n$, so definiert man das äussere Produkt von $\phi$ und $\Psi$ durch

$$\phi \wedge \Psi \quad = \quad \Sigma_{p,q=o}^{n} \; \phi_p \wedge \Psi_q$$

Nach (13) gilt für $\Psi = \xi \in \mathbb{E}$ $\phi \wedge \xi = \Sigma_{p=o}^{n} \phi_p \wedge \xi = \xi \wedge \Sigma_{p=o}^{n} (-1)^p \phi_p$. Da die letzte Vertauschung häufig vorkommt, führt man für $\Sigma_{p=o}^{n} (-1)^p \phi_p$ das Symbol $\overline{\phi}$ ein. $\overline{\phi}$ heisst der zu $\phi$ konjugierte äussere Vektor. Es gilt also

$$(16) \qquad \phi \wedge \xi = \xi \wedge \overline{\phi} \qquad \overline{\phi} = \phi_o - \phi_1 + \ldots + (-1)^n \phi_n$$

Des weiteren gelten offenbar folgende Formeln

$$\overline{\phi + \Psi} = \overline{\phi} + \overline{\Psi} \qquad \overline{\phi \wedge \Psi} = \overline{\phi} \wedge \overline{\Psi}$$

$$\overline{\overline{\phi}} = \phi \qquad \phi = \overline{\phi} \text{ für } \phi \in K$$

Ist M eine Menge äusserer Vektoren, so bezeichnet $\overline{M}$ die Menge aller $\overline{\phi}$, $\phi \in M$.

Die äussere Algebra ist eine nicht kommutative Algebra. Das äussere Produkt zweier homogener äusserer Vektoren bleibt sich nach (12) bei Vertauschung seiner Faktoren bis auf einen Faktor $\pm 1$ gleich. Diese Aussage gilt offenbar nicht mehr für das äussere Produkt zweier nicht homogener äusserer Vektoren, d.h. zweier allgemeiner Elemente von $\mathbb{E}^\wedge$.

Ist $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ eine Basis in $\mathbb{E}$, so ist $1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1} \wedge \varepsilon^n, \ldots, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n$ offenbar eine Basis in $\mathbb{E}^\wedge$. Sie heisst die von $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ in $\mathbb{E}^\wedge$ induzierte Basis. Sie besteht aus $\Sigma_{p=o}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ Elementen. Die äussere Algebra über einem n-dimensionalen Vektorraum hat also die Dimension $2^n$.

Wir betrachten nun die äussere Algebra $D^\wedge$ über dem Dualraum $D$ von $E$. Es gilt $D^\wedge = D^{\wedge 0} + D^{\wedge 1} + \ldots + D^{\wedge n}$. Die äusseren Algebren $E^\wedge$ und $D^\wedge$ sind duale Vektorräume. Ist nämlich $F$ eine lineare Form über $E^\wedge$, so ist $F$ insbesondere auch lineare Form über $E^{\wedge 0}, E^{\wedge 1}, \ldots, E^{\wedge n}$. Es sei nun $F_p \in D^{\wedge p}$ die von $F$ über $E^{\wedge p}$ induzierte lineare Form. Wir erweitern ihren Definitionsbereich auf $E^\wedge$, indem wir $\langle F_p, \phi \rangle = \langle F_p, \phi_p \rangle$ setzen, $\phi \in E^\wedge$, $\phi_p$ homogene Komponente p-ter Stufe von $\phi$. Daraus folgt dann eine offenbar eineindeutige lineare Zuordnung der linearen Formen $F$ über $E$ und der Elemente $(F_0 + F_1 + \ldots + F_n) \in D^\wedge$. Dies war zu beweisen.

Sind $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ und $e_1, e_2, \ldots, e_n$ duale Basen aus $E^\wedge$ und $D^\wedge$, so sind die von ihnen in $E^\wedge$ und $D^\wedge$ induzierten Basen bis auf bestimmte Faktoren aus $K$ dual. Der Beweis hiervon reduziert sich auf die schon gezeigte Aussage, dass die in $E^{\wedge p}$ und $D^{\wedge p}$ induzierten Basen bis auf den Faktor $p!$ dual sind.

Ein Vektorunterraum von $E^\wedge$ heisst eine Unteralgebra, wenn das äussere Produkt je zweier seiner Elemente wieder in ihm enthalten ist. Ist $\mathcal{E} \subset E$ ein Vektorunterraum, $\Delta$ sein Dualraum, so kann man $\mathcal{E}$ mit einer Unteralgebra von $E$ identifizieren. Zu diesem Zweck betrachtet man formal gleiche Elemente von $E^\wedge$ und $\mathcal{E}^\wedge$ als identisch. Ist nämlich etwa $\xi, \eta \in \mathcal{E} \subset E$, so bezeichnet $\xi \wedge \eta$ gleichzeitig eine antisymmetrische Form zweiter Stufe über $\Delta$ und eine solche über $D$, d.h. $\xi \wedge \eta \in \mathcal{E}^{\wedge 2}$ und $\xi \wedge \eta \in E^{\wedge 2}$.

Definition der Ideale, einige einfache Eigenschaften.

Im Hinblick auf die Addition und die äussere Multiplikation ihrer Elemente bildet die äussere Algebra einen nicht kommutativen Ring mit Einselement. Ein Vektorunterraum $I \subset E^\wedge$ heisst ein zweiseitiges Ideal, wenn $\phi \wedge I \wedge \phi' \subset I$ für alle $\phi, \phi' \in E^\wedge$. $\phi \wedge I \wedge \phi'$ bezeichnet die Menge der Produkte $\phi \wedge \psi \wedge \phi'$, $\psi \in I$. Für Linksideale fordert man statt dessen

$\phi \wedge I \subset I$ und für Rechtsideale $I \wedge \phi \subset I$ für jeweils alle $\phi \in E^\wedge$. Offenbar ändert man die Definition der Ideale nicht, wenn man diese Bedingung nur für $\phi \in E$ fordert. Ist I ein Ideal, so ist auch $\bar{I}$ ein Ideal des gleichen Typus wie I. Ist z.B. I ein zweiseitiges Ideal, so ist $\bar{I}$ offenbar Vektorunterraum von $E^\wedge$ und aus $\psi \in \bar{I}$, $\phi, \phi' \in E^\wedge$ ergibt sich $\bar{\psi} \in I$, also $\bar{\phi} \wedge \bar{\psi} \wedge \bar{\phi}' \in I$ und folglich $\phi \wedge \psi \wedge \phi' \in \bar{I}$. Sind I und I' Ideale gleichen Typs, so sind auch $I + I'$ sowie $I \cap I'$ Ideale vom gleichen Typ.

$M \subset E^\wedge$ heisst eine Idealbasis des zweiseitigen Ideals I, wenn alle Elemente von I Summen äusserer Produkte $\phi \wedge \psi \wedge \phi'$ sind, $\psi \in M$, $\phi, \phi' \in E^\wedge$. Offenbar bildet die Menge dieser Summen auch das kleinste zweiseitige Ideal, das M enthält. Man bezeichnet dieses mit $[M]$. $[M]_l$ bzw. $[M]_r$ bezeichnen das kleinste Links- bzw. Rechtsideal, das M enthält, d.h. die Menge der Summen von $\phi \wedge \psi$ bzw. $\psi \wedge \phi$, $\psi \in M$, $\phi \in E^\wedge$. M heisst Idealbasis des Linksideals I, wenn $I = [M]_l$, und des Rechtsideals I', wenn $I' = [M]_r$ ist. Die Begriffe Idealbasis und Basis sind zu unterscheiden. M ist eine Basis des Ideals I, heisst I ist die Menge der Linearkombinationen von Elementen aus M. Ist im folgenden einfach von Idealen die Rede, so gelten die betreffenden Aussagen für alle drei Idealtypen. "Ist I ein Ideal, M eine Idealbasis von I" heisst also:" Ist I ein zweiseitiges - bzw.Links-, bzw. Rechtsideal, und $I = [M]$, bzw. $I = [M]_l$, bzw. $I = [M]_r$", u.s.w.

Ist I ein Ideal und M eine Idealbasis von I, so dass $M = \bar{M}$ ist, so gilt $I = [M] = [\bar{M}] = [M]_l = [M]_r$. $[M]$ besteht nämlich aus den Summen der $\phi \wedge \psi \wedge \phi'$, $\psi \in M$, $\phi, \phi' \in E^\wedge$. Offenbar kann man hier sogar voraussetzen, dass $\phi$ und $\phi'$ homogen sind. Gilt nun etwa $\phi \in E^{\wedge p}$, so ist $\phi \wedge \psi = \psi \wedge \phi$, wenn p gerade, und $\phi \wedge \psi = \bar{\psi} \wedge \phi$, wenn p ungerade. Da $\bar{\psi} \in M$, folgt $\phi \wedge \psi \wedge \phi \in [M]_r$, bzw. $[M] \subset [M]_r$. Die umgekehrte Inklusion ist evident. Es gilt also $[M] = [M]_r$. In gleicher Weise zeigt man $[M] = [M]_l$. Die Gleich-

heit von [M] und $\overline{[M]}$ folgt schliesslich aus $\overline{\Phi \wedge \Psi \wedge \Phi'} = \bar{\Phi} \wedge \bar{\Psi} \wedge \bar{\Phi}'$ und $\bar{\Psi} \in M$. I selbst ist aber einem der drei Ideale $[M], [M]_l$ oder $[M]_r$ nach Voraussetzung gleich. Es gilt also in diesem Fall insbesonders auch $I = \bar{I}$.

Ein Ideal, das eine Idealbasis in E besitzt, heisse einfach, ein solches mit einer Idealbasis, die nur aus p-Vektoren $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ besteht, heisse homogen. Gilt für das Ideal I $\bar{I} = I$, so heisse das Ideal selbstkonjugiert. Einfache Ideale sind offenbar homogen, homogene offenbar selbstkonjugiert. Jedoch gilt nicht das Umgekehrte. Vgl. 1.Beispiel im Anhang. Für homogene Ideale I gilt $I = [I \cap E^{\wedge 0}, I \cap E^{\wedge 1}, \ldots, I \cap E^{\wedge n}]$. Einfache, homogene und selbstkonjugierte Ideale sind nach dem vorigen Abschnitt immer zweiseitig. Existiert in einem Ideal I ein äusserer Vektor $\phi$, dessen homogene Komponente $\phi_o$ nicht verschwindet, so gilt $I = E^{\wedge}$. Da I ein Vektorraum ist, kann man nämlich $\phi_o = 1$ voraussetzen, bzw. $\phi = 1 + \psi$, $\psi \in E^{\wedge 1} + E^{\wedge 2} + \ldots + E^{\wedge n}$. Daraus folgt $(1 + \psi) \wedge E^{\wedge n} = E^{\wedge n} \wedge (1 + \psi) = E^{\wedge n} \subset I$. Des weiteren gilt dann $E^{\wedge n-1} \subset I$, denn aus $\Omega \in E^{\wedge n-1}$ folgt $\Omega \wedge (1 + \psi) = \Omega + \Omega_o \in I$, wobei $\Omega_o \in E^{\wedge n} \subset I$, also $\Omega \in I$, wenn I ein Links - oder zweiseitiges Ideal ist. Eine analoge Überlegung gilt offenbar, wenn I Rechtsideal ist.Man erhält auf die gleiche Weise $E^{\wedge n-2} \in I$, u.s.w. Wir setzen im folgenden immer stillschweigend voraus, dass die betrachteten Ideale von $E^{\wedge}$ verschieden sind, d.h. dass alle Elemente der Ideale verschwindende homogene Komponenten 0-ter Stufe haben.

Im folgenden bezeichnen $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}_o$ u.s.w. immer Vektorunterräume von E.

Lemma 1: Ist $\mathcal{E}_o$ direkte Summe von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$, so gilt

$$\mathcal{E}_o^{\wedge} = \mathcal{E}^{\wedge} + [\mathcal{E}'] \cap \mathcal{E}_o^{\wedge}, \quad \mathcal{E}^{\wedge} \cap [\mathcal{E}'] = 0.$$

Zum Beweis wählen wir in $\mathcal{E}$ eine Basis $\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^n$, so dass $\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^r$ bzw. $\varepsilon^{r+1},\varepsilon^{r+2},\ldots,\varepsilon^s$ Basen von $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ sind. Dann bildet $1,\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^s$ $\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$, $\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3,\ldots,\varepsilon^{s-1}\wedge\varepsilon^s,\ldots,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\wedge\ldots\wedge\varepsilon^s$ die in $\mathcal{E}_o^\wedge$ induzierte Basis. Die Elemente dieser Basis, deren sämtliche Indizes $< r$ sind, bilden eine Basis in $\mathcal{E}^\wedge$, alle restliche, für die mindestens ein Index $> r$ ist, bilden eine Basis von $[\mathcal{E}']\cap\mathcal{E}_o^\wedge$, betrachtet als Vektorraum. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2: Ist I ein Ideal in $\mathcal{E}^\wedge$, so ist $I\cap\mathcal{E}^\wedge$ ein Ideal gleichen Typs in $\mathcal{E}^\wedge$.

Aus $\phi\in I\cap\mathcal{E}^\wedge$, $\xi\in\mathcal{E}$ folgt nämlich $\xi\wedge\phi\in I$ und $\xi\wedge\phi\in\mathcal{E}^\wedge$, wenn I etwa ein Linksideal ist. In gleicher Weise zeigt man diese Eigenschaft für Rechts- und zweiseitige Ideale.

Überschiebung

Ist $\phi\in E^{\boxtimes p}$, $p>0$, $T\in D^{\boxtimes p-1}$, $x\in D$, so ist $\langle\phi,x\boxtimes T\rangle\in K$. $\langle\phi,x\boxtimes T\rangle$ hängt von T linear ab, wenn man X und $\phi$ festhält, d.h. es existiert $\psi\in E^{\boxtimes p-1}$, so dass $\langle\phi,x\boxtimes T\rangle=\langle\psi,T\rangle$ ist für alle $T\in D^{\boxtimes p-1}$. Wir bezeichnen $\psi$ in diesem Falle mit $x\phi$. Für $\phi\in E^{\wedge p}$ gilt $x\phi\in E^{\wedge p-1}$, was aus $\langle\phi,x\boxtimes x_1\boxtimes\ldots\boxtimes x_{p-1}\rangle=\phi(x,x_1,\ldots,x_{p-1})$ folgt.

Nun gilt für $\xi\in E$, $\psi\in E^{\boxtimes p-1}$ $\langle\xi\boxtimes\psi,x\boxtimes T\rangle=\langle\xi,x\rangle\cdot\langle\psi,T\rangle$, bzw. $x(\xi\boxtimes\psi)=\langle x,\xi\rangle\psi$. Da nun $x\phi$ von $\phi$ offenbar linear abhängt, erhält man für $\phi=\xi^1\wedge\xi^2\wedge\ldots\wedge\xi^p$ aus (15").

$$(*)\qquad x(\xi^1\wedge\xi^2\wedge\ldots\wedge\xi^p)=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\langle x,\xi^k\rangle(\xi^1\wedge\xi^2\wedge\ldots\wedge\xi^{k-1}\wedge\xi^{k+1}\wedge\ldots\wedge\xi^p)$$

Für $\psi\in E^{\wedge o}=K$ setzen wir $x\psi=0$. Wir definieren für $\phi=\phi_o+\phi_1+\ldots+\phi_n$, die Überschiebung mit $x\in D$ durch $x\phi=x\phi_o+x\phi_1+\ldots+x\phi_n$. $x\phi$ heisst der mit x überschobene äussere Vektor $\phi$. Die Überschiebung gehorcht folgender Formel

$$(17) \qquad x(\phi\wedge\psi) = (x\phi)\wedge\psi + \bar{\phi}\wedge(x\psi) \qquad \phi,\psi \in \Xi^{\wedge}.$$

Da die Überschiebung eine lineare Operation ist, genügt es, (17) für $\phi = \eta^1\wedge\eta^2\wedge\ldots\wedge\eta^q$ und $\psi = \omega^1\wedge\omega^2\wedge\ldots\wedge\omega^r$ zu beweisen. Man erhält aus (*)

$$x(\phi\wedge\psi) = \Big\{\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\langle x,\eta^k\rangle(\eta^1\wedge\eta^2\wedge\ldots\wedge\eta^{k-1}\wedge\eta^{k+1}\wedge\ldots\wedge\eta^q)\Big\}\wedge\psi + (-1)^q\,\phi\wedge\Big\{\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\langle x,\omega^i\rangle(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\ldots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\ldots\wedge\omega^r)\Big\}$$

Nach (*) ist die erste Summe gleich $x\phi$, die zweite gleich $x\psi$. Da $(-1)^q\phi = \bar{\phi}$ ist, ist (17) damit bewiesen. Für den Fall $q = 0$ oder $r = 0$ gilt (17) offenbar auch.

Unmittelbar aus (17) erhält man für $\phi,\psi,\Omega \in \Xi^{\wedge}$

$$(17') \qquad x(\phi\wedge\psi\wedge\Omega) = (x\phi)\wedge\psi\wedge\Omega + \bar{\phi}\wedge(x\psi)\wedge\Omega + \bar{\phi}\wedge\bar{\psi}\wedge(x\Omega)$$

Wählt man $\xi \in \Xi$ und $x \in \mathfrak{D}$, so dass $\langle x,\xi\rangle = 1$, so ergibt (17) für beliebiges $\phi \in \Xi^{\wedge}$

$$(17'') \qquad \phi = x(\xi\wedge\phi) + \xi\wedge(x\phi)$$

Erzeugender Unterraum von $M \subset \Xi^{\wedge}$:

$\mathcal{E}$ heisst erzeugender Unterraum von M, wenn $M \subset \mathcal{E}^{\wedge}$. In diesem Abschnitt wird der kleinste erzeugende Unterraum einer Menge bestimmt.

F sei die Menge aller $x \in D$, welche der Bedingung $xM = 0$ genügen. $xM$ ist die Menge aller $x\phi$, $\phi \in M$. $\mathcal{E}(M)$ bezeichne den zu F orthogonalen Vektorunterraum von $\Xi$.

Lemma 3: Aus $M \subset \mathcal{E}^{\wedge}$ folgt $\mathcal{E}(M) \subset \mathcal{E}$.

Aus $x \perp \mathcal{E}$, $\phi \in \mathcal{E}^{\wedge}$ folgt nämlich nach (15") $x\phi = 0$, also wegen $M \subset \mathcal{E}^{\wedge}$ auch $xM = 0$, d.h. $x \perp \mathcal{E}(M)$. Daraus ergibt sich $\mathcal{E}(M) \subset \mathcal{E}$.

Lemma 4: Es sei $\mathcal{E}(M) \subset \mathfrak{E}$, $\mathcal{E}'$ werde von $\mathcal{E}$ und einem Vektor $\xi \notin \mathcal{E}$ aufgespannt. Dann gilt $M \subset \mathcal{E}^\wedge$, falls $M \subset \mathcal{E}'^\wedge$ ist.

Zum Beweis wählt man $x \perp \mathcal{E}$, so dass $\langle \xi, x \rangle = 1$ ist. Für $\phi \in M$ gilt dann nach (17")

$$\phi = x(\xi \wedge \phi) + \xi \wedge (x\,\phi)$$

Daraus folgt wegen $x\,\phi = 0$ die Gleichheit $\phi = x(\xi \wedge \phi)$. Andererseits ergibt Lemma 1 $\phi = \phi' + \xi \wedge \phi''$, wobei $\phi', \phi'' \in \mathcal{E}^\wedge$. Eingesetzt in $x\,(\xi \wedge \phi)$ erhält man aus $\xi \wedge \xi \wedge \phi'' = 0$, $x\,(\xi \wedge \phi') = \phi' - \xi \wedge (x\phi')$ und $x\phi' = 0$ schliesslich $\phi = x(\xi \wedge \phi') = \phi' \in \mathcal{E}^\wedge$.

Die beiden ersten Hilfssätze zusammengefasst ergeben

Satz 1: $\mathcal{E}(M)$, der Orthogonalraum aller $x \in D$, für welche $xM = 0$, ist der kleinste erzeugende Unterraum von M.

Es sei noch angemerkt, dass $\phi$ und $\overline{\phi}$ die gleichen erzeugenden Unterräume haben, denn $x\phi = 0$ und $x\overline{\phi} = 0$ bedeuten beide, dass sämtliche mit x überschobenen homogenen Komponenten von $\phi$ verschwinden.

## 2.Kapitel

## Ideale in der äusseren Algebra

### Basisraum eines Ideals

Ist $\mathcal{E}$ – wie bereits vereinbart – Vektorunterraum von $\mathbb{E}$, I ein zweiseitiges Ideal aus $\mathbb{E}$ , so heisse $\mathcal{E}$ Basisraum von I, wenn $I = [I \cap \mathcal{E}^\wedge]$. $\mathcal{E}$ ist also nicht selbst Idealbasis von I, sonderndie äussere Algebra über $\mathcal{E}$ enthält eine solche. In analoger Weise definiert man den Basisraum für ein Links- bzw. Rechtsideal I ' durch $I' = [I' \cap \mathcal{E}^\wedge]_l$ bzw. $I' = [I' \cap \mathcal{E}^\wedge]_r$. Es gilt

Lemma 1: Ist $\mathcal{E}$ ein Basisraum des Ideals I und ist $\mathbb{E}$ direkte Summe von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$, so ist I direkte Summe von $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ und $I \cap [\mathcal{E}'] \cap [\mathcal{E}]$.

Es sei etwa I ein zweiseitiges Ideal. Dann ist jedes Element von I nach Voraussetzung Summe äusserer Produkte $\phi \wedge \psi \wedge \phi'$, $\psi \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$. Nach Lemma 1 des 1.Kapitels gilt $\mathbb{E} = \mathcal{E}^\wedge + [\mathcal{E}']$, $\mathcal{E}^\wedge \cap [\mathcal{E}'] = 0$. Es folgt $\phi = \phi_1 + \phi_2$, $\phi' = \phi'_1 + \phi'_2$, wobei $\phi_1\ \phi'_1 \in \mathcal{E}^\wedge$und $\phi_2, \phi'_2 \in [\mathcal{E}']$. Daraus ergibt sich $\phi \wedge \psi \wedge \phi' = \phi_1 \wedge \psi \wedge \phi'_1 + \Omega$ , wobei $\phi_1 \wedge \psi \wedge \phi'_1 \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$ und $\Omega \in I \cap [\mathcal{E}']$. Da weiterhin $\Omega$ eine Summe von äusseren Produkten, von denen jedes den Faktor $\psi \in \mathcal{E}^\wedge$ enthält, gilt $\Omega \in [\mathcal{E}]$, also $\Omega \in I \cap [\mathcal{E}'] \cap [\mathcal{E}]$. Folglich kann jedes Element $\theta \in I$ als Summe $\theta_1 + \theta_2$ dargestellt werden, $\theta_1 \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$ und $\theta_2 \in I \cap [\mathcal{E}'] \cap [\mathcal{E}]$. Die Eindeutigkeit dieser Zerlegung folgt aus $\mathcal{E}^\wedge \cap [\mathcal{E}'] = 0$, denn $\theta_1 + \theta_2 = \theta'_1 + \theta'_2$, wobei $\theta_1, \theta'_1 \in \mathcal{E}^\wedge$ und $\theta_2, \theta'_2 \in [\mathcal{E}']$, hat zur Folge $\theta_1 - \theta'_1 = \theta'_2 - \theta_2 = 0$. damit ist Lemma 1 bewiesen.

Weiterhin sei erinnert, dass wir $I \neq \mathbb{E}^\wedge$ voraussetzen, dass also die homogenen Komponenten 0-ter Stufe der Elemente von I sämtlich verschwinden. In Lemma 1 kann folglich $\mathcal{E}^\wedge$ durch $\mathcal{E}^{\wedge 1} + \mathcal{E}^{\wedge 2} + \ldots + \mathcal{E}^{\wedge m}$ ersetzt werden.

Lemma 2: Ist $\mathcal{E}$ ein Basisraum der Ideale gleichen Typs I und I', so ist $\mathcal{E}$ auch Basisraum der Ideale I + I'. Ist $\mathcal{E}$ Basisraum von I, so auch von $\bar{I}$.

Sind etwa I und I' zweiseitige Ideale, so gilt $I + I' = [(I + I') \cap \mathcal{E}^\wedge]$, denn $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ und $I' \cap \mathcal{E}^\wedge$ sind in $(I + I') \cap \mathcal{E}^\wedge$ enthalten. Eine analoge Überlegung gilt für Links- und Rechtsideale. Die letzte Aussage des Lemmas folgt aus $\bar{I} \cap \mathcal{E}^\wedge = \overline{I \cap \mathcal{E}^\wedge}$. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 2 ist $\mathcal{E}$ auch Basisraum von $I + \bar{I}$, $I' + \overline{I'}$ und $I + I' + \bar{I} + \overline{I'}$.

Lemma 3: Ist $\mathcal{E}$ Basisraum der Ideale I und I', so gilt

$$(I + I') \cap \mathcal{E}^\wedge = I \cap \mathcal{E}^\wedge + I' \cap \mathcal{E}^\wedge.$$

Es sei $\mathcal{E}_0$ ein Vektorunterraum von $\mathbb{E}$, so dass $\mathbb{E}$ direkte Summe von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_0$ ist. Nach Lemma 1 gilt $I = I \cap \mathcal{E}^\wedge + I \cap [\mathcal{E}_0]$ und $I' = I' \cap \mathcal{E}^\wedge + I' \cap [\mathcal{E}_0]$, ~~wenn I und I' zweiseiti e Ideale sind.~~ Daraus folgt $I + I' = I \cap \mathcal{E}^\wedge + I' \cap \mathcal{E}^\wedge + I \cap [\mathcal{E}'] + I' \cap [\mathcal{E}']$. Andererseits gilt $(I + I') = (I + I') \cap \mathcal{E}^\wedge + (I + I') \cap [\mathcal{E}']$. Da $\mathcal{E}^\wedge \cap [\mathcal{E}'] = 0$, folgt daraus die Behauptung.

Lemma 4: Ist $\mathcal{E}$ ein Basisraum des Ideals I aus $\mathbb{E}^\wedge$, $\mathcal{E}_0$ ein Basisraum des Ideals $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ aus $\mathcal{E}^\wedge$, so ist $\mathcal{E}_0$ auch Basisraum des Ideals I.

Im 1. Kapitel wurde bereits bemerkt, dass $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ ein Ideal der äusseren Algebra $\mathcal{E}^\wedge$ über $\mathcal{E}$ ist und zwar gleichen Typus wie I selbst. Es sei nun etwa I zweiseitig. Sind alle Elemente von $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ Summen äusserer Produkte $\theta \wedge \psi \wedge \theta'$, $\theta, \theta' \in \mathcal{E}^\wedge$ und $\psi \in I \cap \mathcal{E}_0^\wedge$, andererseits alle Elemente von I Summen äusserer Produkte $\phi \wedge \Omega \wedge \phi'$, $\phi, \phi' \in \mathbb{E}^\wedge$ und $\Omega \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$, so sind letztere offenbar Summen der äusseren Produkte $\phi \wedge \theta \wedge \psi \wedge \theta' \wedge \phi'$, $\psi \in I \cap \mathcal{E}_0^\wedge$, woraus die Behauptung folgt.

Assoziierte Unterräume

Wir suchen im folgenden Abschnitt den kleinsten Basisraum eines Ideals. Dabei wird gezeigt, dass ein solcher existiert, und eindeutig ist.

Es sei I ein zweiseitiges Ideal, F die Menge aller $x \in D$, für welche $xI \subset I + \bar{I}$. Den zu F orthogonalen Vektorunterraum $\mathcal{E}_z \in E$ nennt man den assoziierten Unterraum des zweiseitigen Ideals I. Ist I ein Linksideal, so definieren wir seinen assoziierten Unterraum $\mathcal{E}_l$ als Orthogonalraum aller $x \in D$, für welche $xI \in I$. In analoger Weise definieren wir für ein Rechtsideal den assoziierten Unterraum $\mathcal{E}_r$ durch die Bedingung $xI \subset \bar{I}$. Wir bemerken, dass ein zweiseitiges Ideal zugleich Links- und Rechtsideal ist. Betrachten wir es als solches, so bezeichnen wir $\mathcal{E}_l$ bzw $\mathcal{E}_r$ zur Unterscheidung als links- bzw. rechtsassoziierten Unterraum.

Lemma 5: Ist $\mathcal{E}$ Basisraum des Ideals I, so enthält $\mathcal{E}$ den assoziierten Unterraum von I.

Es sei I etwa ein zweiseitiges Ideal. Nach Voraussetzung gilt $i = [I \cap \mathcal{E}^\wedge]$. Jedes Element von I ist Summe äusserer Produkte $\phi \wedge \psi \wedge \phi'$, $\psi \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$. Aus $x \perp \mathcal{E}$ folgt nach Satz 1, 1.Kapitel $x\psi = 0$ und (17'), 1.Kapitel, ergibt

$$x(\phi \wedge \psi \wedge \phi') = (x\phi) \wedge \psi \wedge \phi' + \bar{\phi} \wedge \bar{\psi} \wedge (x\phi')$$

Setzt man $\overline{x\phi'} = \Omega$, so gilt $\bar{\phi} \wedge \bar{\psi} \wedge (x\phi') = \overline{\phi \wedge \psi \wedge \Omega}$. Dieser äussere Vektor gehört offenbar zu $\bar{I}$, woraus $x(\phi \wedge \psi \wedge \phi') \in I + \bar{I}$ folgt. Es gilt also für alle $x \perp \mathcal{E}$ $xI \subset I + \bar{I}$, d.h. $x \perp \mathcal{E}_z$. Daraus folgt $\mathcal{E}_z \subset \mathcal{E}$.

Für Links- bzw. Rechtsideale verläuft der Beweis analog. Für Linksideale ist z.B. überall $\phi' = 1$ zu setzen, entsprechend für Rechtsideale $\phi = 1$.

Lemma 6: $\mathcal{E}$ enthalte den assoziierten Unterraum des Ideals I, $\mathcal{E}'$ werde von $\mathcal{E}$ und $\xi \notin \mathcal{E}$ aufgespannt. Dann ist $\mathcal{E}$ Basisraum von I, wenn $\mathcal{E}'$ ein solcher ist.

Wir betrachten zum Beweis wieder ein zweiseitiges Ideal I. Nach Lemma 4 genügt es, zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ Basisraum des Ideals $I \cap \mathcal{E}'^{\wedge}$ der äusseren Algebra über $\mathcal{E}'$ ist. Lemma 1 ergibt, dass $\phi \in I \cap \mathcal{E}'^{\wedge}$ darstellbar ist als

$$\phi = \phi_0 + \xi \wedge \phi_1 \qquad \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{E}^{\wedge}$$

Man wählt nun ein $x \in D$, so dass $\langle x, \xi \rangle = 1$ und $x \perp \mathcal{E}$ ist. Dann gilt $x\,\phi_0 = x\,\phi_1 = 0$ und (17), 1.Kapitel, ergibt $x\,\phi = \phi_1 \in I + \bar{I}$, da ja $x \perp \mathcal{E}_z$. Nach Lemma 2 ist $\mathcal{E}'$ auch Basisraum der zweiseitigen Ideale $\bar{I}$ und $I + \bar{I}$ und Lemma 3 ergibt $(I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}'^{\wedge} = I \cap \mathcal{E}'^{\wedge} + \bar{I} \cap \mathcal{E}'^{\wedge}$. Da offenbar $\phi_1 \in (I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}'^{\wedge}$ gilt mithin

$$(*) \qquad \phi_1 = \Omega + \bar{\Psi} \qquad \Omega, \Psi \in I \cap \mathcal{E}'^{\wedge}$$

Daraus folgt $\xi \wedge \phi_1 = \xi \wedge \Omega + \Psi \wedge \xi \in I$, also insbesondere $\phi_0 \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$. Wir beweisen nun $\phi \in [I \cap \mathcal{E}^{\wedge}]$, indem wir zeigen, dass man in $(*)$ $\Omega$ und $\Psi$ aus $I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ wählen kann. Daraus folgt nämlich $\xi \wedge \phi_1 \in [I \cap \mathcal{E}^{\wedge}]$, also wegen $\phi_0 \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ die Behauptung.

Wir zerlegen dazu $\Omega$ und $\Psi$ in gleicher Weise wie $\phi$ und erhalten wie oben

$$\Omega = \Omega_0 + \xi \wedge \Omega_1 \qquad \Omega_0 \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$$
$$\Psi = \Psi_0 + \xi \wedge \Psi_1 \qquad \Psi_0 \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$$

Es folgt $\phi_1 - \Omega_0 - \bar{\Psi}_0 \in [\xi] \cap \mathcal{E}^{\wedge}$, also nach Lemma 1 $\phi_1 = \Omega_0 + \bar{\Psi}_0$. Damit ist Lemma 6 für zweiseitige Ideale bewiesen. Wir bemerken, dass für Links-, bzw. Rechtsideale der Beweis des Lemmas mit der Zerlegung $\phi = \phi_0 + \xi \wedge \phi_1$ schon fast erbracht ist, da z.B. für Rechtsideale schon aus $\phi_1 \in \bar{I}$, d.h. $\phi = \phi_0 + \bar{\Phi}_1 \wedge \xi$ folgt, dass $\phi_0 \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$.

Wir betrachten noch die links- und rechtsassoziierten Unterräume eines zweiseitigen Ideals I. Aus $x \perp \mathcal{E}_1$ folgt $x\,I \subset I \subset I + \bar{I}$, also insbesondere $x \perp \mathcal{E}_z$. Daraus ergibt sich $\mathcal{E}_z \subset \mathcal{E}_1$. Auf gleiche Weise erhält man $\mathcal{E}_z \subset \mathcal{E}_r$ folglich $\mathcal{E}_z \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_r$. Darüber hinaus gilt

Lemma 7: Links- und rechtsassoziierter Unterraum eines zweiseitigen Ideals sind gleich. Sind sie echter Unterraum von E, so sind sie dem assoziierten Unterraum $\mathcal{E}_z$ gleich und I ist selbstkonjugiert.

Zum Beweis zeigt man, dass $I = \bar{I}$, falls ein Vektor $\xi \notin \mathcal{E}_1$ existiert. Aus $I = \bar{I}$ folgt nämlich $I + \bar{I} = I$, d.h. in diesem Fall sind die Definitionsbedingungen von $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_r$ und $\mathcal{E}_z$ gleich.

Es sei $\xi \notin \mathcal{E}_1$ und $x \perp \mathcal{E}_1$, derart dass $\langle \xi, x \rangle = 1$ ist. Aus (17") im 1.Kapt. folgt für beliebiges $\phi \in I$

$$\bar{\phi} = x\,(\xi \wedge \bar{\phi}) + \xi \wedge (x\,\bar{\phi})$$

Da $\xi \wedge \bar{\phi} = \phi \wedge \xi$ und $x\,\bar{\phi} = -\overline{x\,\phi}$, also $\xi \wedge (x\,\bar{\phi}) = -(x\,\phi) \wedge \xi$ gilt, folgt

$$\bar{\phi} = x\,(\phi \wedge \xi) - (x\,\phi) \wedge \xi$$

Die Idealeigenschaft ergibt $\phi \wedge \xi \in I$ und wegen $x \perp \mathcal{E}_1$ gilt daher $x\,(\phi \wedge \xi) \in I$. Aus dem gleichen Grunde gilt $x\,\phi \in I$ und $(x\,\phi) \wedge \xi \in I$, woraus schliesslich $\bar{\phi} \in I$, bzw. $\bar{I} \subset I$ folgt. Daraus ergibt sich $\bar{\bar{I}} = I \subset \bar{I}$, bzw. $I = \bar{I}$. In gleicher Weise zeigt man $I = \bar{I}$, falls ein $\xi \notin \mathcal{E}_r$ existiert. Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Für ein zweiseitiges Ideal ist also eigentlich nur der assoziierte Unterraum von Interesse. Fasst man die bisherigen Hilfssätze über assoziierte Unterräume zusammen, so erhält man

Satz 1: Der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}$ des Ideals I ist der kleinste Basisraum dieses Ideals.

Links- und rechtsassoziierter Unterraum eines zweiseitigen Ideals sind gleich. Sie sind höchstens dann echter Unterraum von E, wenn I selbstkonjugiert ist, und sind in diesem Fall mit dem assoziierten Unterraum von I identisch.

Die letzte Aussage besagt, dass man ein selbstkonjugiertes zweiseitiges Ideal aus einer selbstkonjugierten Idealbasis M als Linksideal $[M]_l$ oder als Rechtsideal $[M]_r$ entwickeln kann, wie im 1. Kap. schon bemerkt. In der Tat ist $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ selbstkonjugiert, wenn $I = \bar{I}$ gilt. Man vergleiche 2. Beispiel im Anhang.

Als Korollar von Satz 1 erhält man wegen Lemma 1 folgende Aussage

Ist $\mathcal{E}$ der assoziierte Unterraum des Ideals I, p die Dimension von $\mathcal{E}$ und ist E direkte Summe von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$, so gilt

$$(1) \qquad I = I \cap \mathcal{E}^\wedge + I \cap [\mathcal{E}] \cap [\mathcal{E}']$$

$$(2) \qquad [\mathcal{E}^{\wedge p}] \subset I \subset [\mathcal{E}]$$

Die Zerlegung in (1) ist eindeutig.

Lemma 8: Ist I ein Ideal, M eine Idealbasis von I, so kann man in der Definitionsbedingung des assoziierten Unterraumes von I anstatt $x\,I$ einfach $x\,M$ setzen.

Lemma 8 folgt für zweiseitige Ideale aus (17'), 1.Kapitel. Gehört $\psi \in M$, so gilt nämlich für $\phi,\ \phi' \in \mathcal{E}^\wedge$

$$x\,(\phi \wedge \psi \wedge \phi') = (x\,\phi) \wedge \psi \wedge \phi' + \bar{\phi} \wedge (x\,\psi) \wedge \phi' + \bar{\phi} \wedge \bar{\psi} \wedge (x\,\phi') \quad \in I + \bar{I}$$

sofern $x \psi \in I + \bar{I}$ . Daraus folgt dann $xI \subset I + \bar{I}$. Der Beweis für Links- und Rechtsideale verläuft analog.

Hier stellt sich die Frage, wie man eine vorgegebene Menge $M \subset E^\wedge$ in ein Ideal einbetten kann, so dass der assoziierte Unterraum dieses Ideals möglichst klein wird. Wir vergleichen hier $[M]$, $[M]_l$ und $[M]_r$. $\mathcal{E}, \mathcal{E}_l$ und $\mathcal{E}_r$ seien der Reihe nach die assoziierten Unterräume. Da $[M]_l \subset [M]$ und $[M]_r \subset [M]$, ergibt Lemma 8 z.B. für $x \perp \mathcal{E}_l$ $\quad x M \subset [M]_l \subset [M] + \overline{[M]}$ , d.h. $x \perp \mathcal{E}$ , bzw. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_l$. Ebenso zeigt man $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_r$. D.h. $\mathcal{E}$ ist der kleinste der drei assoziierten Unterräume und ist in ihrem Durchschnitt enthalten. Es sei noch bemerkt, dass z.B. ein Vergleich von $\mathcal{E}_l$ und dem linksassoziierten Unterraum von $[M]$ nicht auf die gleiche Weise möglich ist, denn $[M]$ hat als Linksideal betrachtet $M$ im allgemeinen nicht als Idealbasis, d.h. es gilt im allgemeinen nicht $[M] = [M]_l$.

Summe und Durchschnitt zweier Ideale. Ideale $I$ und $I'$ gleichen Typs.

$I + I'$ und $I \cap I'$ sind gleichen Typs wie $I$ und $I'$. Im folgenden bezeichnen $\mathcal{E}_s$, $\mathcal{E}_d$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ der Reihe nach die assoziierten Unterräume von $I + I'$, $I \cap I'$, $I$ und $I'$. Wir setzen in diesem Abschnitt immer $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}' = 0$ voraus. Dass diese Bedingung für die hier bewiesenen Aussagen wesentlich ist, wird im Anhang durch Beispiele belegt.

Satz 2: Aus $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}' = 0$ folgt $\mathcal{E}_s = \mathcal{E} + \mathcal{E}'$

Nach Lemma 2 ist $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$ Basisraum von $I + I'$, da es Basisraum von $I$ und von $I'$ ist. Bezeichnet $J$ das Ideal $(I + I') \cap (\mathcal{E} + \mathcal{E}')^\wedge$ der äusseren Algebra über $(\mathcal{E} + \mathcal{E}')^\wedge$, so ist der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}_o$ von $J$ identisch mit dem assoziierten Unterraum $\mathcal{E}_s$ von $(I + I')$. Nach Lemma 4 ist $\mathcal{E}_o$ nämlich Basisraum von $I + I'$, d.h. nach Satz 1 , $\mathcal{E}_s \subset \mathcal{E}_o$. Andererseits gilt $\mathcal{E}_s^\wedge \cap (I + I')$ ist enthalten in $J$ und folglich auch Idealbasis von $J$,

woraus $\mathcal{E}_o \subset \mathcal{E}_s$ folgt. Die gleiche Überlegung ergibt, dass $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ assoziierte Unterräume der Ideale $I \cap (\mathcal{E} + \mathcal{E}')^\wedge$ bzw. $I' \cap (\mathcal{E} + \mathcal{E}')^\wedge$ der äusseren Algebra über $(\mathcal{E} + \mathcal{E}')$ sind. Man kann also den Beweis von Satz 2 unter der Voraussetzung $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \mathbf{E}$ führen, was darauf hinausläuft, die Betrachtung auf die äussere Algebra $(\mathcal{E} + \mathcal{E}')^\wedge$ zu beschränken.

Wir beweisen Satz 2 für zweiseitige Ideale I und I', indem wir zeigen, dass $x\, I \subset I + \bar{I}$ für alle $x \perp \mathcal{E}_s$. Dies ist nämlich gleichbedeutend mit $x \perp \mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_s$. Die gleiche Folgerung für $\mathcal{E}'$ ergibt schliesslich $\mathcal{E} + \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_s$, bzw. $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \mathcal{E}_s$.

Da $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ eine Idealbasis von I ist, hat man nach Lemma 8 nur zu zeigen, dass $x(I \cap \mathcal{E}^\wedge) \subset (I + \bar{I})$ für alle $x \perp \mathcal{E}_s$. Nach Definition von $\mathcal{E}_s$ gilt offenbar

$$x\,(I \cap \mathcal{E}^\wedge) \subset (I + I' + \bar{I} + \overline{I'}) \cap \mathcal{E}^\wedge$$

Nun gilt nach dem Korollar von Satz 1

$$I + \bar{I} = (I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}^\wedge + (I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}] \cap [\mathcal{E}']$$
$$I' + \overline{I'} = (I' + \overline{I'}) \cap [\mathcal{E}] \cap [\mathcal{E}'] + (I' + \overline{I'}) \cap \mathcal{E}'^\wedge$$

Da andererseits nach Lemma 1 auch $\mathbf{E}^\wedge$ direkte Summe von $\mathcal{E}^\wedge$, $[\mathcal{E}] \cap [\mathcal{E}']$ und $\mathcal{E}'^\wedge$ ist (vorausgesetzt $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \mathbf{E}$), gilt offenbar $(I + \bar{I} + I' + \overline{I'}) \cap \mathcal{E}^\wedge = (I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}^\wedge$. Daraus folgt die Behauptung. Der Beweis für Links- und Rechtsideale erlaubt einige evidente Vereinfachungen.

Lemma 9: Ist I ein zweiseitiges Ideal, $\mathcal{E}$ sein assoziierter Unterraum, $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E} = 0$, so gilt $(I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}'] = I \cap [\mathcal{E}']$.

Nach Lemma 2 gilt $I + \bar{I} = [(I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}^\wedge]$, $\phi \in I + \bar{I}$ ist also Summe von äusseren Produkten $\Theta \wedge \Psi \wedge \Theta'$, $\Psi \in (I + \bar{I}) \cap \mathcal{E}^\wedge$ und $\Theta, \Theta' \in (\mathcal{E}_o + \mathcal{E}')^\wedge$,

wobei $\mathcal{E}_o$ ein Vektorunterraum von $\mathbb{E}$ ist, so dass $\mathbb{E}$ direkte Summe von $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ ist. Man kann offenbar sogar annehmen, dass $\Theta$ und $\Theta'$ äussere Produkte von Vektoren aus $\mathcal{E}_o$ und $\mathcal{E}'$ sind. $\phi \in (I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}']$ ist dann offenbar nur möglich, wenn in jedem Summanden $\Theta \wedge \Psi \wedge \Theta'$ entweder $\Theta$ oder $\Theta'$ einen Faktor aus $\mathcal{E}'$ enthält. Also ist $\phi$ eine Summe von Produkten $\xi \wedge \Omega$ und $\Omega' \wedge \eta$, wobei $\Omega, \Omega' \in (I + \bar{I})$ und $\xi, \eta \in \mathcal{E}'$. Aus $\Omega = \Omega_1 + \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1, \Omega_2 \in I$, folgt aber $\xi \wedge \Omega = \xi \wedge \Omega_1 + \Omega_2 \wedge \xi \in I$. Da offenbar auch $\Omega' \wedge \eta \in I$ folgt schliesslich $\phi \in I$ für alle $\phi \in (I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}']$, bzw. $(I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}'] \subset I$, woraus die Behauptung folgt, denn $I \cap [\mathcal{E}'] \subset (I + \bar{I}) \cap [\mathcal{E}']$ ist evident.

Satz 3: Aus $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}' = 0$ folgt $\mathcal{E}_d = \mathcal{E} + \mathcal{E}'$. Sind I und I' zweiseitige Ideale, so ist $I \cap I'$ selbstkonjugiert.

Wir beweisen Satz 3 zunächst für zweiseitige Ideale.
Da $I \subset [\mathcal{E}]$, $I' \subset [\mathcal{E}']$, gilt $I \cap I' = I \cap [\mathcal{E}'] \cap I \cap [\mathcal{E}]$. Dieselbe Gleichheit gilt nach Lemma 2 auch für $I + \bar{I}$ und $I' + \overline{I'}$ anstatt I und I'. Aus Lemma 8 ergibt sich

$$I \cap I' = (I + \bar{I}) \cap (I' + \overline{I'})$$

Die zweite Aussage von Satz 3 folgt unmittelbar aus dieser Gleichung. Des weiteren ergibt sich die Inklusion $\mathcal{E}_d \subset \mathcal{E} + \mathcal{E}'$, da aus $x \perp \mathcal{E} + \mathcal{E}'$ offenbar

$$x(I \cap I') \subset (I + \bar{I}) \cap (I' + \overline{I'}) = I \cap I',$$

also insbesondere $x \perp \mathcal{E}_d$ folgt. Um die umgekehrte Inklusion $\mathcal{E} + \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_d$ zu beweisen, zeigen wir wieder gemäss Lemma 8 $x (I \cap \mathcal{E}^\wedge) \subset I + \bar{I}$ für alle $x \perp \mathcal{E}_d$.

Es sei $\phi \in I \cap \mathcal{E}^\wedge$. Ist $\mathcal{E}'$ von der Dimension p, so existiert nach dem Korollar von Satz 1 in $\mathcal{E}'^{\wedge p} \cap I'$ ein p-Vektor $\Theta \neq 0$. Da I und I'

zweiseitige Ideale sind, gilt $\theta \wedge \phi \in I \cap I'$. Für $x \perp \mathcal{E}_d$ gilt daher $x(\theta \wedge \phi) \in I \cap I' + \overline{I \cap I'} = I \cap I'$. Da $x(\theta \wedge \phi)$ und $(x\theta) \wedge \phi$ in I enthalten sind, folgt schliesslich aus (17), 1.Kapitel, $\bar{\theta} \wedge (x\phi) \in I$, also wegen $\bar{\theta} = (-1)^p \theta$

$$\theta \wedge (x \phi) \in I \subset I + \bar{I}$$

Es ergibt sich nun $x \phi \in I + \bar{I}$ aus folgender Bemerkung: Ist $\Omega \in \mathcal{E}'^{\wedge q}$ $q > 0$, so dass $\Omega \neq 0$ und $\Omega \wedge (x \phi) \in I + \bar{I}$, so existiert $\Omega' \in \mathcal{E}'^{\wedge q-1}$ mit den gleichen Eigenschaften.

Um $\Omega'$ zu finden, wählt man $y \perp \mathcal{E}$, derart dass $y\Omega = \Omega' \neq 0$ ist. Da $\Omega \notin \mathcal{E}^{\wedge}$, existiert ein derartiges y. Wegen $x \phi \in \mathcal{E}^{\wedge}$ gilt $y(x \phi) = 0$ und es folgt aus (17), 1.Kapitel:

$$y \{\Omega \wedge (x \phi)\} = \Omega' \wedge (x \phi)$$

Bleibt noch zu zeigen, dass dieser äussere Vektor in $I + \bar{I}$ liegt. Man hat $\Omega \wedge (x \phi) = \Psi_1 + \bar{\Psi}_2$, $\Psi_1, \Psi_2 \in I$ vorausgesetzt. Nun gilt $y \bar{\Psi}_2 = - \overline{(y \Psi_2)}$. Wegen $y \perp \mathcal{E}$ sind $y \Psi_1$ und $y \Psi_2$ in $I + \bar{I}$ enthalten, also auch $y \Psi_1 - \overline{(y \Psi_2)} = \Omega' \wedge (x \phi) \in I + \bar{I}$.

Wir skizzieren noch kurz den Beweis von Satz 3 für Rechtsideale. Man erhält in diesem Fall für $x \perp (\mathcal{E} + \mathcal{E}')$ sofort

$$x (I \cap I') \subset \overline{I \cap I'}, \qquad \text{d.h.} \quad \mathcal{E}_d \subset \mathcal{E} + \mathcal{E}'.$$

Für $\phi \in I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ betrachtet man $\phi \wedge \theta$, $\theta \in \mathcal{E}'^{\wedge p}$ und bemerkt, dass $\phi \wedge \theta$ in I und in I' enthalten ist, letzteres, da $\phi \wedge \theta$ entweder gleich $\theta \wedge \phi$ oder gleich $\theta \wedge \bar{\phi}$ und I' ein Rechtsideal ist. Aus $x(\phi \wedge \theta) = (x \phi) \wedge \theta + \bar{\phi} \wedge (x \theta)$ folgt, da auch $\bar{I}$ ein Rechtsideal ist, $(x \phi) \wedge \theta \in \bar{I}$ bzw. $\overline{(x \phi)} \wedge \theta \in I$. Die weitere Überlegung verläuft analog der obigen. Für Linksideale ergibt sich ein ähnlicher Beweis.

Äquivalenz und Vollständigkeit

Wir erinnern, dass die äusseren Algebren $E^\wedge$ und $D^\wedge$ als Vektorräume über K dual sind. Ein Vektorunterraum $F \subset D$ heisst Lösung der Teilmenge $M \subset E^\wedge$, wenn die äussere Algebra $F^\wedge$ über F im Orthogonalraum $M^\perp \subset D^\wedge$ von M enthalten ist.

Satz 4: Ist $\mathcal{E} \subset E$ der Orthogonalraum von $F \subset D$, so ist F dann und nur dann Lösung von M, wenn $M \subset [\mathcal{E}]$.

Wir wählen in E und D duale Basen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ und $e_1, e_2, \ldots, e_n$ so dass $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r$ Basis von $\mathcal{E}$ und $e_{r+1}, \ldots, e_n$ Basis von F ist. Dann bilden 1 und die $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, $r < i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, $p = 1, 2, \ldots, n-r$, eine Basis des Vektorunterraumes $F^\wedge$ von $D^\wedge$. Ebenso bilden $\varepsilon^{j_1} \wedge \varepsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_p}$ wobei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$, $p = 1, 2, \ldots, n$ und $j_1 < r$, eine Basis des Vektorunterraums $[\mathcal{E}]$ von $E^\wedge$. Aus der Dualität der in $E^\wedge$ und $D^\wedge$ induzierten Basen folgt, dass die Vektorunterräume $[\mathcal{E}] \subset E^\wedge$ und $F^\wedge \subset D^\wedge$ zueinander orthogonal sind. Die Inklusion $F^\wedge \subset M^\perp$ ist also äquivalent $M \subset F^{\wedge\perp} = [\mathcal{E}]$ w.z.b.w.

Zwei Mengen M und M' aus E heissen äquivalent, wenn sie die gleichen Lösungen haben. Ein Ideal heisst vollständig, wenn es jedes äquivalente Ideal enthält.

Lemma 10: Ein Ideal ist dann und nur dann vollständig, wenn $I = \bigcap_{I \subset [\mathcal{E}]} [\mathcal{E}]$

Offenbar gilt $I \subset J = \bigcap_{I \subset [\mathcal{E}]} [\mathcal{E}]$ und offenbar ist J ein Ideal, das alle Lösungen von I als Lösungen hat. Ist F Lösung von J, so gilt $I \subset J \subset [F^\perp]$, d.h. F ist Lösung von I. Ist I vollständig, so folgt daraus $J \subset I$ bzw. $J = I$. Es sei nun umgekehrt $J = I$ vorausgesetzt. Hat das Ideal I' die gleichen Lösungen wie I, so gilt offenbar $I' \subset J = I$, d.h. I ist vollständig.

Lemma 11: Vollständige Ideale sind homogen.

Wir bezeichnen wieder $\bigcap_{I\subset[\mathcal{E}]}[\mathcal{E}]$ mit J. Aus I = J folgt nämlich $I \cap E^{\wedge p} = J \cap E^{\wedge p} = \bigcap_{I\subset[\mathcal{E}]}\{[\mathcal{E}] \cap E^{\wedge p}\}$. Offenbar ist J direkte Summe dieser Ausdrücke für p = 1,2,...,n, woraus die Behauptung folgt.

Satz 5: Zu jedem Ideal I existiert genau ein kleinstes vollständiges Ideal J, das I enthält. I und J sind äquivalent.

Wir betrachten $J = \bigcap_{I\subset[\mathcal{E}]}[\mathcal{E}]$. Es gilt $I \subset J$, d.h. jede Lösung von J ist auch Lösung von I. Das Umgekehrte ist evident. Es folgt I äquivalent und $J = \bigcap_{J\subset[\mathcal{E}]}[\mathcal{E}]$. Nach Lemma 1 ist J vollständig. Ist weiterhin J' ein vollständiges Ideal, das I enthält, so ist jede Lösung von J' auch Lösung von I, d.h. $\bigcap_{I\subset[\mathcal{E}]}[\mathcal{E}] = J \subset \bigcap_{J'\subset[\mathcal{E}]}[\mathcal{E}] = J'$, w.z.b.w.

Lemma 12: $M \subset E^{\wedge}$; $[M]$, $[M]_l$ und $[M]_r$ sind äquivalent.

F ist nach Satz 4 dann und nur dann Lösung von M, wenn $M \subset [F^{\perp}]$. Daraus folgt sofort $[M] \subset [F^{\perp}]$ und die gleiche Inklusion für $[M]_l$ und $[M]_r$. Die umgekehrte Folgerung ist evident.

Zwei Mengen M und M' aus $E^{\wedge}$ heissen algebraisch äquivalent, wenn $[M] = [M']$ gilt. Nach Lemma 12 sind algebraisch äquivalente Mengen äquivalent.

$M \subset E^{\wedge}$ ist also insbesondere jeder Idealbasis von [M] äquivalent. Das Problem, die Lösungen von M zu suchen, kann also auf das Problem reduziert werden, die Lösungen von $[M] \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ zu suchen, wobei $\mathcal{E}$ der assoziierte Unterraum von [M] ist. Das letzte Problem ist insofern einfacher, als $\mathcal{E}$ von kleinerer Dimension als E ist. Unter den algebraisch äquivalenten Mengen kann das Problem in diesem Sinne offenbar nicht weiter vereinfacht werden, wohl aber unter den äquivalenten Mengen. Dazu beweisen wir

Satz 6 : Ist $I$ ein Ideal, $J$ das kleinste vollständige Ideal, das $I$ enthält, so ist der assoziierte Unterraum von $J$ in dem von $I$ enthalten.

Es sei $\mathfrak{E}_o$ der assoziierte Unterraum von $I$, $\mathfrak{E}'$ der von $J$. Offenbar gilt $I \subset [\mathfrak{E}_o]$, folglich auch $J \subset [\mathfrak{E}_o]$. Wir beweisen nun zunächst

$$(*) \qquad J = \bigcap_{I \subset [\mathfrak{E}] \subset [\mathfrak{E}_o]} [\mathfrak{E}]$$

Dazu zeigen wir, dass $I \subset [\mathfrak{E}]$ zur Folge hat $I \subset [\mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o]$. Da $J$, $I$, $I \cap \mathfrak{E}_o^\wedge$ äquivalent sind, sind folgende Inklusionen gleichbedeutend: $J \subset [\mathfrak{E}]$, $I \subset [\mathfrak{E}]$, $I \cap \mathfrak{E}_o^\wedge \subset [\mathfrak{E}]$. Um $I \subset [\mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o]$ zu beweisen, hat man also nur $I \cap \mathfrak{E}_o^\wedge \subset [\mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o]$ zu zeigen. Dazu zerlegen wir $\mathfrak{E}_o$ in eine direkte Summe $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o$, wobei wir $\mathfrak{E}_1$ so wählen, dass es mit $\mathfrak{E}$ nur den Nullvektor gemeinsam hat. Nach Lemma 1 1. Kap. ist dann $\mathfrak{E}_o^\wedge$ direkte Summe von $\mathfrak{E}_1^\wedge$ und $[\mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o] \cap \mathfrak{E}_o^\wedge \subset [\mathfrak{E}]$, während $\mathfrak{E}_1^\wedge \cap [\mathfrak{E}]$ nur den Nullvektor enthält. Aus $I \cap \mathfrak{E}_o^\wedge \subset [\mathfrak{E}]$ folgt also $I \cap \mathfrak{E}_o^\wedge \subset [\mathfrak{E} \cap \mathfrak{E}_o]$, womit $(*)$ bewiesen ist.

Weil $J$ homogen, also selbstkonjugiert ist, ist $\mathfrak{E}'$ der Orthogonalraum aller $x \in D$, für die $x J \subset J$. Nun ist $\mathfrak{E}_o$ offenbar Basisraum aller $[\mathfrak{E}] \subset [\mathfrak{E}_o]$, d.h. für diese einfachen Ideale hat $x \perp \mathfrak{E}_o$ zur Folge $x [\mathfrak{E}] \subset [\mathfrak{E}]$. Daraus folgt $x J \subset J$ bzw. $x \perp \mathfrak{E}'$, bzw. $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}_o$, w.z.b.w.

Folgerung: Sind $M$, $M' \subset E^\wedge$ zwei äquivalente Teilmengen, so sind auch $[M']$ und $[M]$ nach Lemma 12 äquivalent. Ist $J$ das kleinste $[M]$ enthaltende vollständige Ideal, so sind auch $[M']$ und $J$ äquivalent, bzw. so ist $J$ auch das kleinste vollständige Ideal, das $M'$ enthält. Der assoziierte Unterraum $\mathfrak{E}'$ von $J$ ist also nach Satz 6 in den assoziierten Unterräumen von $[M]$ und $[M']$ enthalten. Daraus folgt, dass $J \cap \mathfrak{E}'^\wedge$ diejenige zu $M$ äquivalente Teilmenge aus $E^\wedge$ ist, die den kleinsten erzeugenden Unterraum hat. Das oben genannte Lösungsproblem von $M$ kann also nicht über $I \cap \mathfrak{E}'^\wedge$ hinaus vereinfacht werden.

Wir nennen $\mathfrak{E} \subset E$ einen Minimalraum des Ideals $I$, wenn $I \subset [\mathfrak{E}]$, eine solche Inklusion aber für keinen echten Unterraum von $\mathfrak{E}$ gilt. Aus $(*)$ folgt, dass alle Minimalräume von I im assoziierten Unterraum von I enthalten sind. Da I und J äquivalent sind, ist also jeder Minimalraum von I auch solcher von J und umgekehrt. Es ist folglich auch jeder Minimalraum von I im assoziierten Unterraum $\mathfrak{E}'$ von J enthalten. Darüber hinaus gilt

Satz 7 : Der assoziierte Unterraum von J ist Summe aller Minimalräume von I.

Es gelte $I \subset [\mathfrak{E}_1]$. Ist $\mathfrak{E}$ ein in $\mathfrak{E}_1$ enthaltener Minimalraum, so gilt offenbar $I \subset [\mathfrak{E}_1] \cap [\mathfrak{E}] = [\mathfrak{E}]$. Es gilt also $J = \bigcap_{\mathfrak{E} \text{ min.}} [\mathfrak{E}]$. Ist nun $x \in D$ zu allen Minimalräumen $\mathfrak{E}$ von I orthogonal, d.h. gilt für alle diese $x\,[\mathfrak{E}] \subset [\mathfrak{E}]$, so folgt also $x\,J \subset J$ bzw. x ist orthogonal zum assoziierten Unterraum von J. Dieser ist also in der Summe aller Minimalräume von I enthalten. Da die umgekehrte Inklusion bereits aufgezeigt wurde, ist Satz 7 damit bewiesen.

Anhang

Beispiele

Wir bemerken zunächst, dass man aus einer endlichen Idealbasis M und einer Basis $\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^n$ von E eine Basis der Ideale $[M],[M]_l$ und $[M]_r$ konstruieren kann. Es seien nämlich $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_m$ die Elemente von M und $\omega_1,\ldots,\omega_{2^n}$ die Elemente der in $E^\wedge$ von $\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^n$ induzierten Basis. Offenbar bilden die $\omega_i \wedge \psi_k \wedge \omega_j$ $i,j = 1,2,\ldots,2^n$, $k = 1,2,\ldots,m$ ein Erzeugendensystem von $[M]$. Setzt man anstatt $\omega_j$ bzw. $\omega_i$ immer 1, so erhält man eine Erzeugendensystem von $[M]_l$ bzw $[M]_r$. Man erhält jeweils eine Basis, wenn man aus den Erzeugendensystemen maximale linear unabhängige Teilsysteme auswählt. Praktisch konstruiert man die Basis sofort schrittweise, indem man zunächst aus M ein maximales linear unabhängiges System auswählt - angenommen M sei selbst linear unabhängig -, sodann $\varepsilon^1 \wedge \psi_1$, $\varepsilon^1 \wedge \psi_2,\ldots,\varepsilon^1 \wedge \psi_m$, $\varepsilon^2 \wedge \psi_1$ usw. nacheinander hinzunimmt, sofern das bei jedem Schritt neu entstandene System linear unabhängig ist, und diesen Prozess so lange wiederholt, bis man ein Element $\phi \in E^{\wedge n}$ als Linearkombination ausdrücken kann. Wir erinnern noch, dass der kleinste erzeugende Unterraum $\mathcal{E}(M)$ der Menge M Basisraum der Ideale $[M]$, $[M]_l$ und $[M]_r$ ist.

Wir schreiben in den Beispielen für $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge \ldots \wedge \varepsilon^k$ einfach $(ij\ldots k)$

1. Beispiel: Nicht homogenes, selbstkonjugiertes Ideal.

E sei von der Dimension 5, $\psi = (1) + (234)$, $I = [\psi]$

I enthält nicht (1), ist also sicher nicht homogen, da $\psi \in I$. Andererseits gilt $\overline{\psi} = -\psi \in I$, also $\overline{\phi \wedge \psi \wedge \phi'} = -\overline{\phi}\ \psi\ \overline{\phi'} \in I$, dh. I ist selbstkonjugiert.

2. Beispiel: Die Idealbasis $I \cap \mathcal{E}^\wedge$ für ein selbstkonjugiertes Ideal.

E sei von der Dimension 5; $\psi = (1) + (234)$. $I = [\psi]$. Die Idealbasis ist bis auf einen Faktor (-1)

selbstkonjugiert. $I \cap \mathcal{E}^{\wedge 2}$ hat offenbar (12),(13),(14) als Basis. $x \in D$ habe bezugs der zu (1),(2),...(5) dualen Basis die Komponenten $x^1, x^2, \ldots, x^5$. Es gilt $x\psi = x^1 + x^2(34) - x^3(24) + x^4(23)$. $x\psi \in I + \bar{I}$ ist also gleichbedeutend mit $x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$, d.h. der assoziierte Unterraum enthält zumindest (1),(2),...,(4). Da der v n den letzten Vektoren aufgespannte Vektoruntorraum von E offenbar Basisraum von $[\psi]$ ist, ist er mit dem assoziierten Unterraum $\mathcal{E}$ identisch.

Basis von I :

B { (1) + (234)
(12) (13) (14) (15) + (2345)
(123)(124) (125) (134) (135) (145)
(1234) (1235) (1245) (1345)
(12345) }

$I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ hat als Basis alle Elemente von B, in denen 5 nicht vorkommt. Der Vektorraum $I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ ist offenbar selbstkonjugiert. Man erkennt leicht, dass man I aus $I \cap \mathcal{E}^{\wedge}$ als Linksideal erhält, da $\phi \in B$ zur Folge hat $(i) \wedge \phi = \pm \phi \wedge (i)$.

3.Beispiel: Zweiseitiges nicht selbstkonjugiertes Ideal

Sei von der Dimension 4, $\phi = (1) + (23)$, $I = [\phi]$.

Eine analoge Überlegung wie im 2. Beispiel ergibt, dass der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}$ von $[\phi]$ die Basis (1),(2),(3) hat, also echter Unterraum von E ist.

Basis von $[\psi]$:

B { (1) + (23)
(12) (13) (14)
(123) (124) (134) (234)
(1234) }

Man erhält z.B. (14) als $\frac{1}{2}\{\phi \wedge (4) - (4) \wedge \phi\}$, (234) als $\frac{1}{2}\{\phi \wedge (4) + (4) \wedge \phi\}$.

$[\phi]$ ist nicht selbskonjugiert, da $\bar{\phi} \notin [\phi]$. Der linksassoziierte Unterraum von $[\phi]$ ist also $\Sigma$, was man leicht aus $x B \subset [\phi]$ erhält.

4.Beispiel: Assoziierter Unterraum einer Summe zweier Ideale.

$I = [(12)]$, $I' = [(1)]$. Es gilt offenbar $I \subset I'$, d.h. $I + I' = I'$. Der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}$ von $I$ hat als Basis $(1),(2)$ und enthält den von $I'$. Der assoziierte Unterraum $\mathcal{E}_s$ von $I + I'$ ist also echter Unterraum von $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$, nämlich $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}'$.

5.Beispiel: Assoziierter Unterraum eines Durchschnitts zweier Ideale.

$I$ sei das Ideal aus dem 3. Beispiel, $I' = \bar{I}$. Man erhält eine Basis von $I'$, wenn man im 3. Beispiel in $B$ $(1) + (23)$ durch $(1) - (23)$ ersetzt. $I \cap I'$ hat also die Basis $B$, ausgenommen $(1) + (23)$. Man erhält als Basen der assoziierten Unterräume $\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{E}_d$ von $I,I'$ und $I \cap I'$ schliesslich $(1),(2),(3)$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ und $(1)$ $(2),(3),(4)$, d.h. $\mathcal{E}_d$ ist grösser als $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{E}_d$ auch kleiner sein kann als $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$, nimmt man zwei einfache Ideale $[\mathfrak{E}]$ und $[\mathfrak{E}']$, so dass $\mathfrak{E}$ echter Unterraum von $\mathfrak{E}'$ ist.

## Literaturverzeichnis

L.Auslander An ideal theory for exterior differential equations, Ann. of Math. 63 (1956), S.527

N.Bourbaki Algèbre Multilinéaire , Herrmann 1948

E.Cartan Les Systèmes Différentiells Extérieures et leurs Applications Géometriques, Herrmann 1945

D. Kastler Sur l'espace de la théorie quantique des champs, Ann.Univ.Sarav. 4,(1955), S. 206

E. Kähler Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Chelsea, 1949.

Inhaltsverzeichnis


| | Seite |
|---|---|
| Vorwort | |
| 1.Kapitel: Äussere Algebra | |
| Antisymmetrische Tensoren | 1 |
| Das äussere Produkt | 5 |
| Die äussere Algebra über E | 9 |
| Definition der Ideale, einige einfache Eigenschaften | 11 |
| Überschiebung | 14 |
| Erzeugender Unterraum von $M \subset E^{\wedge}$ | 15 |
| 2.Kapitel: Ideale in der äusseren Algebra | |
| Basisraum eines Ideals | 17 |
| Assoziierte Unterräume | 19 |
| Summe und Durchschnitt zweier Ideale I und I' gleichen Typs | 23 |
| Äquivalenz und Vollständigkeit | 27 |
| Anhang: Beispiele | 30 |
| Literaturverzeichnis | 33 |